Distribuição uniforme contínua de probabilidades

A distribuição uniforme contínua de probabilidades é um exemplo de uma distribuição de probabilidades na qual nem todos os subconjuntos do espaço amostral são considerados eventos. A distribuição uniforme contínua de probabilidades é definida sobre um intervalo fechado $[a, b]$ dos reais, onde $a < b$. Intuitivamente, queremos que cada ponto no intervalo $[a, b]$ seja "igualmente provável". Porém, existe um número incontável de pontos; assim, se dermos a todos os pontos a mesma probabilidade finita positiva, não poderemos satisfazer simultaneamente aos axiomas 2 e 3. Por essa razão, gostaríamos de associar uma probabilidade apenas a *alguns* dos subconjuntos de S, de tal modo que os axiomas fossem satisfeitos para esses eventos.

Para qualquer intervalo fechado $[c, d]$, onde $a \le c \le d \le b$, a ***distribuição uniforme contínua de probabilidades*** define a probabilidade do evento $[c, d]$ como

$$\Pr\{[c,d]\} = \frac{d-c}{b-a} .$$

Observe que, para qualquer ponto $x = [x, x]$ a probabilidade de x é 0. Se removermos os pontos extremos de um intervalo $[c, d]$, obteremos o intervalo aberto (c, d). Tendo em vista que $[c, d] = [c, c] \cup (c, d) \cup [d, d]$, o axioma 3 nos dá $\Pr\{[c, d]\} = \Pr\{(c, d)\}$. Em geral, o conjunto de eventos para a distribuição uniforme contínua de probabilidades é qualquer subconjunto do espaço amostral $[a, b]$ que possa ser obtido por uma união finita ou contável de intervalos abertos e fechados.

Probabilidade condicional e independência

Às vezes, temos algum conhecimento parcial antecipado sobre o resultado de um experimento. Por exemplo, suponha que um amigo tenha lançado duas moedas comuns e tenha dito a você que pelo menos uma das moedas mostrou uma cara. Qual é a probabilidade de ambas as moedas serem caras? A informação dada elimina a possibilidade de duas coroas. Os três eventos elementares restantes são igualmente prováveis; assim, deduzimos que cada um ocorre com a probabilidade 1/3. Tendo em vista que apenas um desses eventos elementares mostra duas caras, a resposta à nossa pergunta é 1/3.

A probabilidade condicional formaliza a noção de se ter um conhecimento parcial antecipado do resultado de um experimento. A ***probabilidade condicional*** de um evento A dada a ocorrência de outro evento B é definida como

$$\Pr\{A \mid B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}} \qquad \text{(C.14)}$$

sempre que $\Pr\{B\} \neq 0$. (Lê-se "$\Pr\{A \mid B\}$" como "a probabilidade de A dado B".) Intuitivamente, sabendo-se que o evento B ocorre, a probabilidade de que o evento A também ocorra é $A \cap B$. Ou seja, $A \cap B$ é o conjunto de resultados em que ocorrem A e B. Tendo em vista que o resultado é um dos eventos elementares em B, normalizamos as probabilidades de todos os eventos elementares em B dividindo-as por $\Pr\{B\}$, de tal forma que sua soma seja 1. Por conseguinte, a probabilidade condicional de A dado B é a razão entre a probabilidade do evento $A \cap B$ e a probabilidade do evento B. No exemplo anterior, A é o evento em que ambas as moedas são caras, e B é o evento em que pelo menos uma moeda é cara. Desse modo, $\Pr\{A \mid B\} = (1/4)/(3/4) = 1/3$.

Dois eventos são ***independentes*** se

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\}\Pr\{B\} , \qquad \text{(C.15)}$$

que é equivalente, se $\Pr\{B\} \neq 0$, à condição

$$\Pr\{A \mid B\} = \Pr\{A\} .$$